Felicitaciones!!

1	2	3	4
R+	B	B	B

CALIFICACIÓN
9

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE: S German

LIBRETA:

CARRERA: Lic. Ciencias de la Computacion

COMISIÓN: 4

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2024

Primer Parcial - 15/10/2024

---

1. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ en $\{0, 1\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en X como:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1) + g(3) = f(3) + g(1).$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?

   b) Calcular la cantidad de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y exhibir un representante de cada una de ellas.

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)2^{i-1} = 2^n - n - 1.$$

3. ¿Cuántas funciones $f\colon \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 12\}$ hay que **no** sean inyectivas y que al mismo tiempo cumplan que $f(1) < f(3) < f(5)$?

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 1$. Calcular los posibles valores de $(a^2 + 3b^2 : 2a^2 + 11b^2)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1) a)

Reflexiva: ¿fRf $\forall f \in X$? Si

commutatividad de la suma

$f(1) + f(3) = f(3) + f(1)$ por ~~conmutatividad de la suma~~

Simetrica: $\forall f, g \in X$ si $fRg \Rightarrow$ ¿gRf? Si

Asumo: $fRg \Leftrightarrow f(1) + g(3) = f(3) + g(1)$

qvq: $gRf \Leftrightarrow g(1) + f(3) = g(3) + f(1)$

Luego:

$$f(1) + g(3) = f(3) + g(1) \Leftrightarrow g(3) + f(1) = g(1) + f(3)$$
$$\Leftrightarrow g(1) + f(3) = g(3) + f(1)$$
$$\Leftrightarrow gRf$$

Transitiva: $\forall f, g, h \in X$, si $fRg \wedge gRh \Rightarrow$ ¿fRh? Si

Asumo $\begin{cases} fRg \Leftrightarrow f(1) + g(3) = f(3) + g(1) \\ gRh \Leftrightarrow g(1) + h(3) = g(3) + h(1) \end{cases}$

qvq: $fRh \Leftrightarrow f(1) + h(3) = f(3) + h(1)$

Luego:

$$f(1) + g(3) = f(3) + g(1) \Leftrightarrow g(3) - g(1) = f(3) - f(1)$$
$$\wedge$$
$$g(1) + h(3) = g(3) + h(1) \Leftrightarrow h(3) - h(1) = g(3) - g(1)$$

Entonces

$$f(3) - f(1) = h(3) - h(1) \Leftrightarrow f(3) + h(1) = f(1) + h(3) \Leftrightarrow f(1) + h(3) = f(3) + h(1)$$
$$\Leftrightarrow fRh$$

Relacion de equivalencia:

Como se demostró que R es reflexiva, simetrica y transitiva entonces R es una relación de equivalencia.

Antisimetrica: $\forall f,g \in X$, si $fRg \wedge gRf \Rightarrow$ ¿$f=g$? No

Contraejemplo:

Definimos las siguientes f y g:

$f(1)=1$	$g(1)=1$
$f(2)=0$	$g(2)=0$
$f(3)=1$	$g(3)=1$
$f(4)=1$	$g(4)=0$
$f(5)=1$	$g(5)=0$
$f(6)=1$	$g(6)=0$
$f(7)=1$	$g(7)=0$
$f(8)=1$	$g(8)=0$

Se puede observar que:

$$fRg \Leftrightarrow f(1)+g(3) = f(3)+g(1)$$
$$1 + 1 = 1 + 1$$
$$2 = 2 \checkmark$$

$$gRf \Leftrightarrow g(1)+f(3) = g(3)+f(1)$$
$$1 + 1 = 1 + 1$$
$$2 = 2 \checkmark$$

Pero

$f \neq g$ porque, por ejemplo, $f(8) \neq g(8)$
$1 \neq 0$

Conclusión:
R no es antisimetrica.

---

1) b)

Para calcular la cantidad de clases de equivalencia en R podemos pensar en los posibles valores que puede tomar la igualdad segun los valores que tengo disponibles en el codominio $\{0,1\}$, entonces tenemos 3 valores posibles:

1) $0+0=0$
2) $0+1 = 1+0 = 1$
3) $1+1=2$

Ojo: $f(x)=0\ \forall x$ y $g(x)=1\ \forall x$ se relacionan (ie están en la misma clase) y a vos te quedaron en distintas. Además, si $f(1)=0$ y $f(3)=1$ f no se relaciona con tu representante de clase "=1". Luego, hay 3 clases: $\{f / f(1)=f(3)\}$, $\{f/f(1)=0 \wedge f(3)=1\}$ y $\{f/f(1)=1 \wedge f(3)=0\}$

Entonces tenemos 3 clases de equivalencia.
Exhibo representantes:

clase "=0"

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x=3 \\ 1 & \text{si } x\neq 1,3 \end{cases}$$

clase "=1"

$$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x=3 \\ 1 & \text{si } x\neq 1,3 \end{cases}$$

clase "=2"

$$h(x)\begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{si } x=3 \\ 1 & \text{si } x\neq 1,3 \end{cases}$$

2)

Por inducción:

Afirmación $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$p(n): \sum_{i=1}^{n} (n-i).2^{i-1} = 2^n - n - 1$$

Caso base: ¿$p(1)$ es verdadero? Si

$$p(1): \sum_{i=1}^{1} (1-i).2^{1-1} = 2^1 - 1 - 1$$

$$(1-1).2^{1-1} = 2 - 1 - 1$$

$$0 = 0$$

Paso inductivo: siendo $h \in \mathbb{N}$, si $p(h)$ es V $\Rightarrow$ ¿$p(h+1)$ es V?

$$HI: \sum_{i=1}^{h} (h-i).2^{i-1} = 2^h - h - 1$$

$$qvq: \sum_{i=1}^{h+1} (h+1-i).2^{i-1} = 2^{h+1} - (h+1) - 1 = 2^{h+1} - h - 2$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{h+1} (h+1-i).2^{i-1} = \sum_{i=1}^{h} (h+1-i).2^{i-1} + \left(h+1-(h+1)\right).2^{h+1-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{h} (h+1-i).2^{i-1} + 0.2^h \cancel{-(h+1-0).2^{0-1}} = \sum_{i=1}^{h} (h+1-i).2^{i-1} \cancel{-\frac{h+1}{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \left((h-i).2^{i-1} + 1.2^{i-1}\right) \cancel{-\frac{h+1}{2}} = \sum_{i=1}^{h} (h-i).2^{i-1} + \sum_{i=1}^{h} 2^{i-1}$$ → separo la sumatoria

$$\overset{HI}{=} 2^h - h - 1 + \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{h} 2^i = 2^h - h - 1 + \frac{1}{2}.\left(\sum_{i=0}^{h} 2^i - 2^0\right)$$ → acomodo el índice

$$= 2^h - h - 1 + \frac{1}{2}.\left(\frac{2^{h+1}-1}{2-1} - 1\right) = 2^h - h - 1 + \frac{1}{2}.(2^{h+1} - 2)$$

$$= 2^h - h - 1 + \frac{2^{h+1}}{2} - \frac{2}{2} = 2^h - h - 1 + 2^h - 1 = 2.2^h - h - 2$$

$$\boxed{= 2^{h+1} - h - 2}$$ como queríamos ver.

Conclusión: Por el principio de inducción queda demostrado que $p(n)$ es Verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$

3)

El razonamiento que voy a usar para contar va a ser por el complemento. Voy a contar la cantidad de f totales que cumplen con $f(1) < f(3) < f(5)$ y le voy a restar la cant. de f inyectivas que cumplen con $f(1) < f(3) < f(5)$

Cant. f totales que cumplen $f(1) < f(3) < f(5)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) \\ f(3) \\ f(5) \end{array}\right| f(1,3,5) \longrightarrow \binom{12}{3} \text{ posibilidades}$$

$f(2) \longrightarrow 12$ pos.
$f(4) \longrightarrow 12$ pos.
$f(6) \longrightarrow 12$ pos.
$f(7) \longrightarrow 12$ pos.
$f(8) \longrightarrow 12$ pos.
$f(9) \longrightarrow 12$ pos.
$f(10) \longrightarrow 12$ pos.

Entonces:

$$\boxed{\binom{12}{3} \cdot 12^7}$$

Observo que el numero 12 viene de los 12 elementos que tiene el codominio $\{1, 2, \dots, 12\}$

Observo que $\binom{12}{3}$ ~~esto~~ viene de elegir a un sub-cjto de 3 elementos $\{a, b, c\}$ y como son ~~todos~~ los 3 distintos hay solo 1 forma de asignarlos a $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ y es en la forma que quede $f(1) < f(3) < f(5)$.

Observo que como cuento f totales no hay restriccion en lo que puedo asignar a $f(2), f(4), \dots, f(10)$.

Cant. f inyectivas que cumplen $f(1) < f(3) < f(5)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) \\ f(3) \\ f(5) \end{array}\right| f(1,3,5) \longrightarrow \binom{12}{3} \text{ posibilidades}$$

$f(2) \longrightarrow 9$ pos.
$f(4) \longrightarrow 8$ pos.
$f(6) \longrightarrow 7$ pos.
$f(7) \longrightarrow 6$ pos.
$f(8) \longrightarrow 5$ pos.
$f(9) \longrightarrow 4$ pos.
$f(10) \longrightarrow 3$ pos.

Entonces:

$$\boxed{\binom{12}{3} \cdot \frac{9!}{2!}}$$

Razonamiento analogo al anterior.

La principal diferencia es que como ahora estoy contando f inyectivas tengo que "ir quitando elementos" a medida que avanzo en las asignaciones

Cant f no inyectivas y que $f(1) < f(3) < f(5)$: $\boxed{\binom{12}{3} \cdot 12^7 - \binom{12}{3} \cdot \frac{9!}{2!}}$

MOSA 3/4

4)

Sea $d = (a^2+3b^2 : 2a^2+11b^2)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a^2+3b^2 \\ d \mid 2a^2+11b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid 2.(a^2+3b^2) \\ d \mid 2.a^2+11b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 2a^2+11b-(2a^2+6b^2) = 5b^2$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a^2+3b^2 \\ d \mid 2a^2+11b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid 11.(a^2+3b^2) \\ d \mid 3.(2a^2+11b^2) \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 11a^2+33b^2-(6a^2+33b^2) = 5a^2$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 5a^2 \\ d \mid 5b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid (5a^2 : 5b^2) \Rightarrow d \mid 5.(a^2 : b^2)$$

Sabemos por el enunciado que $(a:b)=1$. Si lo pensamos desde el punto de vista del TFA nos quiere decir que a y b NO tienen primos en común, por lo tanto, elevar al cuadrado a a y b no va a ser que aparezcan nuevos primos, es decir, a^2 y b^2 van a seguir NO teniendo primos en común, entonces $(a^2 : b^2) = 1$.

Luego:

$$d \mid 5.(a^2:b^2) \Rightarrow d \mid 5.1 \Rightarrow d \in Div_+(5) \in \{1, 5\}$$

Observemos que son Div+ porque d es MCD, entonces $d > 0$.

~~Expongo ejemplos:~~

~~$d=5$ con $a=0$ y $b=5$~~

~~$(0^2+3.5^2 : 2.0^2+11.5^2)$~~

Tengo 2 candidatos posibles: $d=1$ o $d=5$

Veamos si $d=5$ ocurre.

Si $d = 5$, entonces

$$5 \mid 2a^2 + 11b^2 \iff 2a^2 + 11b^2 \equiv 0 \ (5)$$
$$\equiv 2a^2 + 1 \cdot b^2 \equiv 0 \ (5)$$

Veamos con una tabla de restos de doble entrada:

mod 5

a	0	1	2	3	4
a^2	0	1	4	4	1
$2a^2$	0	2	3	3	2
b \ b^2					
0	0	2	3	3	2
1	1	3	4	4	3
2	2	4	0	0	4
3	3	0	1	1	0
4	4	1	2	2	1

Era sumando b^2

Veamos:

$$5 \mid a^2 + 3b^2 \iff a^2 + 3b^2 \equiv 0 \ (5)$$

Tabla de restos:

mod 5

b		0	1	2	3	4
	b^2	0	1	4	4	1
a	$3b^2$	0	3	2	2	3
	a^2					
0	0	0	3	2	2	3
1	1	1	4	3	3	4
2	4	4	2	1	1	2
3	4	4	2	1	1	2
4	1	1	4	3	3	4

Continuación EJ 4)

Como $d = 5$ es MCD, hay que encontrar a y b tal que satisfagan ambas expresiones a la vez:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2a^2 + 11b^2 \equiv 0\ (5) \\ 2)\ a^2 + 3b^2 \equiv 0\ (5) \end{array}\right\}$$

Pero al observar las tablas de restos se aprecia que sólo ocurre si

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv 0\ (5) \\ b \equiv 0\ (5) \end{array}\right\}$$ ✓

PERO $(a:b) = 1$ entonces 5 no puede dividir a ambos. ✓

Entonces el único valor posible de d es $d = 1$

Expongo ejemplo

$d = 1$ con $a = 1$ y $b = 1$

$(1^2 + 3.1^2 : 2.1^2 + 11.1^2)$

$(\ 4\ :\ 13) = 1$ ✓

Muy buen Parcial !!